Journal of Quality Engineering and Management

www.pqprc.ir

J. Qual. Eng. Manag. Vol. 14, No. 3 (2024) 272–288.

Paper Type: Original Article

# Fixed Cost Allocation Plan Based on Robust Optimization in Data Envelopment Analysis: A Case Study of the Banking Industry

**Javad Gerami***

Department of Mathematics, Shiraz Branch, Islamic Azad University, Shiraz, Iran; geramijavad@gmail.com.

**Citation:**

| | |
|---|---|
| *Received: 12 February 2024*<br>*Revised: 14 May 2024*<br>*Accepted: 27 June 2024* | Gerami, J. (2024). Fixed cost allocation plan based on robust optimization in data envelopment analysis: A case study of the banking industry. *Journal of Quality Engineering and Management,* 14(3), 272-288. |

## Abstract

**Purpose:** The aim of this study is to propose a fair fixed cost allocation scheme among a set of Decision-Making Units (DMUs), such as banks or factories, in an uncertain environment. The allocation is designed in a way that does not reduce the efficiency of the DMUs and may even lead to efficiency improvements.

**Methodology:** To achieve this goal, a model is developed based on Data Envelopment Analysis (DEA) integrated with robust optimization. Inputs and outputs of the DMUs are considered as fuzzy random variables to reflect environmental uncertainty. The model is linearized and converted into a deterministic programming model using principles from stochastic programming. Furthermore, the concept of a common set of weights is utilized to ensure fairness in the allocation process.

**Findings:** The results indicate that, under the proposed fixed cost allocation plan, the efficiency scores of the DMUs (banks) are not only maintained but in many cases improved. This confirms the effectiveness of the model in preserving and enhancing performance under uncertain conditions.

**Originality/Value:** The novelty of this research lies in the integration of DEA and robust optimization in uncertain environments to design a cost allocation model that ensures non-decreasing efficiency. The use of a common set of weights adds to the fairness of the approach. Additionally, applying the model to the Iranian banking sector highlights its practical relevance and managerial value.

**Keywords:** Data envelopment analysis, Fixed cost allocation, Robust optimization, Joint weight set, Banking.

Corresponding Author: geramijavad@gmail.com

10.48313/jqem.2024.219293

Licensee System Analytics. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

**مهندسی و مدیریت کیفیت**

www.pqprc.ir

دوره ۱۴، شماره (۳)، (۱۴۰۳)، ۲۸۸-۲۷۲

نوع مقاله: پژوهشی

# طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها: مطالعه موردی صنعت بانکداری

**جواد گرامی***

گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران.

## چکیده

**هدف:** هدف این پژوهش، ارایه یک مدل منصفانه برای تخصیص هزینه ثابت میان مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم‌گیرنده مانند بانک‌ها یا کارخانه‌ها، در یک محیط نامطمئن است به‌نحوی‌که کارایی واحدها کاهش نیابد و حتی در مواردی بهبود یابد.

**روش‌شناسی پژوهش:** برای تحقق هدف، از تحلیل پوششی داده‌ها همراه با بهینه‌سازی استوار استفاده شده است. در این مدل، ورودی‌ها و خروجی‌های واحدها به‌صورت اعداد نادقیق تصادفی در نظر گرفته شده و برای خطی‌سازی مدل و تبدیل آن به یک فرم برنامه‌ریزی قطعی، از مفاهیم برنامه‌ریزی تصادفی بهره گرفته شده است؛ همچنین، مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک برای ایجاد یک مبنای منصفانه در تخصیص به کار رفته است.

**یافته‌ها:** یافته‌ها نشان می‌دهند که با استفاده از طرح تخصیص هزینه ثابت پیشنهادی، کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده (بانک‌ها) نه‌تنها کاهش نمی‌یابد بلکه در بسیاری از موارد افزایش می‌یابد. این موضوع نشان‌دهنده موفقیت مدل در حفظ و ارتقا کارایی در فرآیند تخصیص منابع در شرایط عدم قطعیت است.

**اصالت/ارزش‌افزوده علمی:** نوآوری اصلی پژوهش در ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها با بهینه‌سازی استوار در محیط‌های نامطمئن و توسعه یک مدل تخصیص هزینه ثابت بر پایه عدم کاهش کارایی و استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک است؛ همچنین کاربرد عملی مدل در صنعت بانکداری ایران به ارزش واقعی پژوهش در فضای تصمیم‌گیری مدیریتی می‌افزاید.

**کلیدواژه‌ها:** تحلیل پوششی داده‌ها، تخصیص هزینه ثابت، بهینه‌سازی استوار، مجموعه وزنه‌های مشترک، بانکداری.

## ۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها یک روش غیرپارامتری برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده است که می‌تواند برای تخصیص هزینه‌های ثابت میان واحدهای تصمیم‌گیرنده، به‌صورت عادلانه و منصفانه مورد استفاده قرار گیرد. در این روش هزینه ثابت بر اساس سهم هر واحد از منابع مصرفی یا خروجی‌های تولیدی، تخصیص می‌یابد. تخصیص هزینه ثابت با تحلیل پوششی داده‌ها یک روش پارامتری عادلانه است که می‌تواند در سازمان‌های

خدماتی صنعتی و مالی مورد استفاده قرار گیرد [4–1]. در بسیاری از سازمان‌ها و واحدهای تولیدی تخصیص بهینه هزینه‌های ثابت میان بخش‌های مختلف یک چالش اساسی محسوب می‌شود. هزینه‌های ثابت شامل مخارجی هستند که مستقل از میزان تولیدات یا خدمات ارایه شده باید پرداخت شوند. این هزینه‌ها مانند اجاره استهلاک تجهیزات حقوق کارمندان ثابت و سایر هزینه‌های عمومی. تخصیص نادرست این هزینه‌ها می‌تواند بر عملکرد سازمان‌ها تاثیر بگذارد و منجر به ناکارآمدی سازمان‌ها گردد. در بسیاری از سازمان‌ها و واحدهای عملیاتی تخصیص هزینه‌های ثابتی از مسایل کلیدی در مدیریت‌های مالی و بهینه‌سازی منابع می‌باشد [5]. هزینه‌های ثابت شامل مخارجی هستند که شامل چه مستقل از سطح تولید یا خدمات ارایه شده بوده و باید میان واحدهای مختلف به گونه‌ای تخصیص یابد که عملکرد کلی سازمان بهبود یابد یکی از چالش‌های اساسی در این زمینه دستیابی به یک روش منصفانه و کارآمد برای تخصیص این هزینه‌ها بر اساس عملکرد واقعی واحدها می‌باشد [6].

تخصیص هزینه‌های ثابت یکی از مسایل مهم در بسیاری از سازمان‌ها، از جمله بانک‌ها و بنگاه‌های تجاری و صنعتی است. این امر به مدیران کمک می‌کند تا به سازمان تحت مدیریت خود نگاهی منصفانه داشته باشند و از هدر رفت منابع کلی سازمان جلوگیری کنند. همچنین، هزینه‌های ثابت نقشی کلیدی در فرآیند تصمیم‌گیری در زمینه قیمت‌گذاری و تعیین سودآوری صنایع مختلف ایفا می‌کنند. تخصیص صحیح این هزینه‌ها بین واحدهای مختلف تصمیم‌گیری در حوزه‌های گوناگون، مانند تخصیص هزینه‌های تبلیغاتی بین خرده‌فروشان و تخصیص منابع بهداشتی و ارتقای تجهیزات، ضروری است. در این زمینه، گروهی از مطالعات بر پایه کار بنیادی کوک و کرس [7] توسعه یافته‌اند که دو فرض اصلی را معرفی می‌کنند: "عدم‌تغییر کارایی" و "پارتو–حداقلی". اصل عدم‌تغییر کارایی بیان می‌کند که پس از تخصیص هزینه‌های ثابت بین واحدهای تصمیم‌گیری، کارایی این واحدها نباید نسبت به حالت قبل از تخصیص تغییر کند. پس‌ازآن، کوک و ژو [8] کار کوک و کرس [7] را برای مدل‌های مختلف گسترش دادند.

لین [9] نیز اصلاحاتی را بر اساس رویکرد کوک و ژو [8] پیشنهاد کرد، اما تغییرات حاصل‌شده چندان معنادار نبودند.آن‌ها به تخصیص منابع پرداخته و دو اصل تغییرناپذیری کارایی و وزن‌های مشترک را در تخصیص منابع و اهداف بین واحدهای تصمیم‌گیرنده در نظر گرفتند. آنان مکانیزم جدیدی را پیشنهاد کرده‌اند که به‌طور هم‌زمان این اصول را در تخصیص منابع متعدد به‌ویژه در موقعیت‌های مختلف تخصیص هدف‌های متعدد بین واحدها، لحاظ می‌کند. آن و همکاران [10]، رویکردی مبتنی بر کارایی را برای حل مشکلات تخصیص هزینه‌های ثابت در سیستم‌های دو مرحله‌ای ارایه دادند و این مدل را به سیستم‌های عمومی تعمیم دادند. چو و همکاران [11]، رویکرد دو مرحله‌ای را برای تخصیص درآمدهای مشترک یا هزینه‌های ثابت معرفی نمودند. ژانگ و همکاران [12]، استراتژی‌های بازی تهاجمی را برای تخصیص هزینه‌ها در یک محیط غیرمتمرکز معرفی کردند. این رویکرد به‌ویژه در سیستم‌هایی که واحدهای تصمیم‌گیرنده به‌صورت مستقل از هم عمل می‌کنند، مفید است. آن و همکاران [13]، یک مدل جدید و مقاوم تخصیص هزینه ثابت برای سیستم‌های دو مرحله‌ای با ورودی‌ها و خروجی‌های غیرقطعی معرفی نمودند. حسین زاده سلجوقی و همکاران [14]، یک مدل جدید برای تخصیص منصفانه هزینه ثابت در سیستم‌های یک و دومرحله‌ای با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها ارایه دادند.

در دنیای واقعی با موارد زیادی روبرو باشیم که داده‌ها به‌صورت نادقیق می‌باشند. تقریب‌های متفاوتی برای رویارویی با داده‌های نادقیق وجود دارد. به‌عنوان‌مثال تحلیل پوششی داده‌های فازی [15]، تحلیل پوششی داده‌های آماری [19–16]، بهینه‌سازی استوار [20].

یکی از تقریب‌های مناسب برای رویارویی با داده‌های نامطمئن بهینه‌سازی استوار می‌باشد. تقریب‌های متفاوتی بر پایه بهینه‌سازی استوار در چارچوب تحلیل پوششی داده‌ها ارایه شده است. سجادی و همکاران [21] اولین مدل‌ها را در بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها ارایه دادند. عمرانی [22] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه مجموعه‌ای از وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها ارایه دادند. عرب مالدار و همکاران [23] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها جدید بری رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس مدل ابر کارایی تحلیل پوششی داده‌ها در تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر ارایه دادند. طلوع و همکاران [24] یک مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها تحت تکنولوژی بازده به مقیاس متغیر با تمرکز بررسی برآمد قیود نامنفرد و در متغیرهای تصمیم‌گیرنده و پیچیدگی مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها برای رفتار با داده‌های نامطمئن ارایه دادند.

صلاحی و همکاران [25] یک رویکرد جدید بر اساس مفهوم وزن مشترک در بهینه‌سازی استوار برای مدل‌های سنتی تحلیل پوششی داده‌ها ارایه دادند. عربمالدار و همکاران [26] یک مدل کلی بر اساس مدل تابع فاصله جهت‌دار در یک محیط نامطمئن ارایه دادند. آن‌ها با ساختن مجموع امکان تولید در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های نامطمئن کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را به‌دست آوردند. آن‌ها مدل بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها خود را برای ارزیابی عملکرد شرکت‌های بیمه در کشور هند بکار بردند. یکی از رویکردها در تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی

واحدها در یک بستر مشترک مجموعه وزن‌های مشترک می‌باشد. در روش مجموعه وزن‌های مشترک تمام واحدها بر اساس یک مجموعه مشترک از وزن‌ها از مولفه‌های ورودی و خروجی مقایسه می‌گردند [27]. برتری روش مجموعه وزن‌های مشترک را بر روش‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها به‌صورت شرح زیر می‌باشد:

۱. قابلیت مقایسه منصفانه بین واحدها: در مدل‌های کلاسیک تحلیل پوششی داده‌ها نظیر *CCR* یا *BCC*، هر واحد تصمیم‌گیرنده وزن‌هایی را برای ورودی‌ها و خروجی‌ها انتخاب می‌کند که بیشترین کارایی را برای خودش ایجاد کند. این باعث می‌شود که مقایسه بین واحدها ناعادلانه شود، چون هرکدام با "متر و معیار" خاص خودارزیابی می‌شوند. در مقابل، مجموعه وزن‌های مشترک یک معیار یکتا و یکسان برای همه واحدهای تصمیم‌گیرنده ایجاد می‌کند و امکان مقایسه مستقیم و منصفانه را فراهم می‌سازد.

۲. افزایش شفافیت در تصمیم‌گیری: در روش‌های کلاسیک، تفسیر نتایج دشوار است چون وزن‌ها بین واحدها تفاوت زیادی دارند. مجموعه وزن‌های مشترک باعث می‌شوند بتوان به‌راحتی تحلیل کرد که چه ورودی‌ها و خروجی‌هایی بیشترین تاثیر را در کارایی دارند.

۳. کاربردپذیری در تخصیص منابع و هزینه‌ها: زمانی که هدف، تخصیص منابع محدود یا هزینه‌های ثابت بر اساس کارایی است، استفاده از یک مجموعه وزن مشترک بسیار منطقی‌تر است، چون تصمیم‌گیری باید با یک مبنا انجام شود. در تخصیص بودجه یا ارزیابی عملکرد سازمانی، این روش عملی‌تر و عادلانه‌تر است.

۴. پرهیز از کارایی کامل غیرواقعی: در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها کلاسیک، اکثر واحدهای تصمیم‌گیرنده ممکن است به‌طور مصنوعی "کارا" ارزیابی شوند، فقط به این دلیل که وزن‌های خاص خودشان را دارند. روش وزن‌های مشترک معمولا تفکیک دقیق‌تری بین واحدهای واقعا کارا و ناکارا ایجاد می‌کند.

۵. پایه‌گذاری برای رتبه‌بندی دقیق‌تر: با استفاده از یک مجموعه وزن مشترک، می‌توان واحدهای تصمیم‌گیرنده را به‌طور دقیق رتبه‌بندی کرد، چون همگی بر اساس یک مقیاس واحد سنجیده شده‌اند.

جهانشاه لو و همکاران [28] دو روش جدید و عادلانه برای تخصیص هزینه‌های ثابت بر اساس اصل عدم تغییرکارایی و مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها ارایه داند. غازی و همکاران [29] به‌منظور غلبه بر مشکلات ارزیابی از طریق مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها را برای تخصیص بودجه عملیاتی شرکت‌ها ارایه دادند. سلطانی‌فر و همکاران [30] یک مدل جدید برای ادغام و بازسازی شرکت‌ها در تعیین هدف در سیستم‌های بانکی با استفاده از مفهوم مجموعه مشترک وزن‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها ارایه دادند. پیکانی و همکاران [31]، به ارایه یک رویکرد جدید در تحلیل پوششی داده‌ها شبکه‌ای مبتنی بر ماتریس کارایی و مجموعه وزن‌های مشترک بر اساس برنامه‌ریزی چندهدفه برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده با ساختار شبکه‌ای دو مرحله‌ای ارایه دادند. همانطور که در **جدول ۱** مشاهده می‌کنید، ما در یک بررسی جزیی به مقایسه بعضی از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها با مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها در حضور داده‌های نادقیق در موضوع تخصیص هزینه ثابت پرداختیم.

**جدول ۱- مقایسه مدل‌های سنتی و نادقیق تحلیل پوششی داده‌ها در تخصیص هزینه.**

**Table 1- Comparison of traditional and imprecise data envelopment analysis models in cost allocation.**

| نوع تخصیص هزینه و ویژگی‌ها | مدل تحلیل پوششی داده‌ها مورداستفاده | مطالعه انجام‌شده |
|---|---|---|
| استفاده از داده‌های قطعی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده؛ تخصیص هزینه بر اساس کارایی محاسبه‌شده | مدل سنتی CCR | [32] |
| تخصیص هزینه در محیط دارای بازده به مقیاس متغیر، تحلیل بر پایه داده‌های دقیق | مدل سنتی BCC | [33] |
| مدیریت داده‌های نادقیق در تخصیص منابع، کاربرد در شرایطی که داده‌ها در قالب بازه بیان می‌شوند | مدل بازه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها | [34] |
| تخصیص هزینه در محیط‌های دارای عدم قطعیت، مدل‌سازی داده‌ها به‌صورت فازی | تحلیل پوششی داده‌ها فازی | [35] |
| افزایش دقت در شرایط نادقیق، استفاده از توابع عضویت برای تخصیص منابع | مدل فازی با توابع عضویت | [36] |
| مروری بر مدل‌های نادقیق تحلیل پوششی داده‌ها برای تخصیص هزینه و تحلیل حساسیت نسبت به عدم قطعیت | تحلیل پوششی داده‌ها فازی و بازه‌ای | [15]، [20] |
| ارایه چارچوبی برای تخصیص هزینه در شرایط غیرقطعی با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها نادقیق | تحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های نادقیق | [37] |

علی‌رغم کاربرد گسترده مدل‌های تحلیل پوشی داده‌ها در ارزیابی عملکرد و بهره‌وری، کاربرد این روش‌ها در مسایل تخصیص هزینه‌های ثابت، به‌ویژه در شرایط واقعی و پیچیده تصمیم‌گیری، کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در ادبیات موجود، غالب مدل‌های تخصیص هزینه، فرض را بر دقت کامل داده‌ها قرار داده‌اند، درحالی‌که در بسیاری از محیط‌های عملی، داده‌ها با عدم‌قطعیت، نوسان یا خطا همراه‌اند. این امر باعث می‌شود نتایج مدل‌های کلاسیک، از قابلیت اطمینان لازم برخوردار نباشند. از سوی دیگر، استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک که ابزاری موثر برای افزایش قابلیت مقایسه بین واحدهای تصمیم‌گیری است، بیشتر در زمینه تحلیل بهره‌وری به‌کار رفته و به‌ندرت در تخصیص هزینه‌های ثابت مورد بهره‌برداری قرار گرفته است. علاوه بر این، مدل‌هایی که هم‌زمان به عدم قطعیت در داده‌ها و ضرورت حفظ ساختار خطی برای حل موثر ریاضی توجه داشته باشند، محدود و پراکنده‌اند. استفاده از رویکرد بهینه‌سازی استوار به‌منظور پوشش عدم‌قطعیت در داده‌ها و نیز بهره‌گیری از تکنیک‌های خطی‌سازی به‌منظور افزایش قابلیت حل مدل، می‌تواند پاسخی نوآورانه به این شکاف‌ها باشد. پژوهش حاضر با ترکیب این رویکردها تلاش دارد بخشی از این خلأها را پوشش داده و مدلی کاربردی‌تر و منعطف‌تر برای تخصیص هزینه‌های ثابت در محیط‌های واقعی پیشنهاد نماید.

هدف اصلی پژوهش ارایه یک چارچوب تصمیم‌گیری دقیق و منصفانه برای تخصیص هزینه ثابت می‌باشد که بتواند کارایی یک سازمان‌ها را بهبود ببخشد. در این مقاله به بررسی نحوه استفاده از مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک در چهارچوب تحلیل پوششی داده‌ها جهت تخصیص بهینه هزینه ثابت پرداخته می‌شود. مجموعه وزن‌های مشترک از طریق اعمال مجموعه‌ای از وزن‌ها یکسان به مولفه‌های ورودی و خروجی از واحدهای امکان ارزیابی عادلانه را فراهم می‌کند. این روش تخصیص هزینه ثابت بر مبنای عملکرد نسبی و واقعی هر واحد می‌باشد، با این حال در بسیاری از مسایل دنیای واقعی داده‌ها ممکن است دارای نوسانات و عدم قطعیت باشند که می‌تواند بر دقت نتایج تاثیر بگذارد. برای این مقاله برای رویارویی با این چالش، از رویکرد بهینه‌سازی استوار در تحقیق پوششی داده‌ها استفاده می‌کنیم.

بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها به سازمان‌ها کمک می‌کند تا تخصیص هزینه‌های ثابت را به گونه‌ای انجام دهند که حتی در شرایط تغییرات محیطی و نوسانات داده‌ها نتایج پایدار و قابل اتکا باقی بماند. این رویکرد مدل‌هایی را ارایه می‌دهد که نسبت به تغییرات احتمالی در داده‌ها حساس حساسیت کمتری دارند و تخصیص هزینه را با حداقل ریسک انجام می‌دهند. در این مقاله یک چارچوب ترکیبی شامل تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک و بهینه‌سازی استوار برای تخصیص هزینه ثابت استفاده می‌گردد. این چهارچوب با در نظر گرفتن عملکرد نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده بر اساس مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک از مولفه‌های ورودی و خروجی، یک رویه بر اساس در نظر گرفتن عدالت در تخصیص هزینه‌ها با بهره‌گیری از بهینه‌سازی استوار برای افزایش پایداری در شرایط عدم اطمینان را معرفی می‌کند. ما می‌توانیم تصمیمات بهتری در زمینه تخصیص هزینه‌های ثابت اتخاذ کرده و کارایی یک سازمان را بهبود بخشیم.

ادامه این مقاله به‌صورت زیر سازماندهی شده است. در بخش دوم به بررسی موضوع تخصیص هزینه ثابت با استفاده از مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم یک طرح تخصیص هزینه ثابت در یک محیط نامطمئن بر اساس بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها بر پایه مجموعه وزن‌های مشترک را ارایه می‌دهیم. یک کاربرد از رویکرد ارایه‌شده در این مطالعه برای تخصیص هزینه ثابت در مجموعه‌ای از بانک‌ها در کشور ایران به کار می‌بریم و نتایج حاصل از تحقیق را ارایه می‌دهیم.

## ۲- تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌ها با مجموعه وزن‌های مشترک

در تحلیل پوششی داده‌ها، مجموعه وزن‌های مشترک و تخصیص هزینه ثابت هر دو مفاهیمی هستند که با ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده و تقسیم منابع یا هزینه‌ها به شکلی منصفانه و بهینه در ارتباط می‌باشند. در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها سنتی، هر واحد تصمیم‌گیرنده وزن‌های ورودی و خروجی خود را به‌گونه‌ای انتخاب می‌کند که بیشترین کارایی را داشته باشد. این باعث می‌شود مقایسه بین واحدها دشوار گردد، چون برای هر واحد تصمیم‌گیرنده از مجموعه وزن‌های متفاوتی در ارزیابی می‌گردد. مجموعه وزن‌های مشترک راه‌حلی برای رویارویی با این برآمد می‌باشد. در این روش، به دنبال یافتن یک مجموعه وزن مشخص برای تمام واحدهای تصمیم‌گیرنده هستیم تا بتوان مقایسه‌ای منصفانه میان آن‌ها انجام دهیم. در بسیاری از مسایل عملی، برخی هزینه‌ها (مانند هزینه‌های سربار یا هزینه‌های اداری) ثابت هستند، اما باید به نحوی منصفانه میان واحدهای تصمیم‌گیرنده تخصیص یابند.

یکی از رویکردهای تخصیص هزینه، استفاده از روش‌های تحلیل پوششی داده‌ها برای انجام این کار است. در واقع، هدف این است که با توجه به کارایی نسبی واحدها، سهم هرکدام از هزینه‌های ثابت تعیین شود. استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک در فرآیند تخصیص هزینه ثابت به دلایل زیر اهمیت دارد:

۱. انصاف در تخصیص: وقتی همه واحدهای تصمیم‌گیرنده با یک مجموعه وزن ارزیابی شوند، سهم آن‌ها از هزینه‌ها بر اساس یک معیار یکسان و منصفانه تعیین می‌شود.
۲. هم‌راستایی با کارایی: وزن‌های مشترک معمولا طوری انتخاب می‌شوند که تخصیص هزینه با سطح کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده هم‌راستا باشد؛ یعنی واحدهایی که بهره‌ورتر هستند، هزینه کمتری متقبل شوند.
۳. پرهیز از تبعیض: وزن‌های مشترک از استفاده دلخواه هر واحد از وزن‌های خاص خود جلوگیری می‌کند و باعث عدالت در ارزیابی و تخصیص می‌شود.

در ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و تخصیص هزینه ثابت، استفاده از مجموعه وزن‌های مشترک به‌عنوان ابزار مهمی برای ارزیابی عادلانه عملکرد واحدها و تقسیم منصفانه هزینه‌ها شناخته می‌شود. این رویکرد در تصمیم‌گیری‌های مدیریتی، برنامه‌ریزی بودجه و تحلیل کارایی سازمان‌ها بسیار کاربردی است. در این بخش طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل وزن مشترک در تحلیل پوششی داده‌ها را ارایه می‌دهیم.

$n$ واحد تصمیم‌گیرنده را به‌منظور ارزیابی به‌صورت $DMU_j = (X_j, Y_j)$ برای $j = 1, \dots, n$ در نظر بگیرید. بردار $X_j = (x_{1j}, \dots, x_{mj})^T \in R_+^m$ بردار ورودی می‌باشد که به‌منظور تولید بردار خروجی $Y_j = (y_{1j}, \dots, y_{mj})^T \in R_+^s$ مصرف می‌گردد. همچنین فرض کنید بخواهیم هزینه ثابت به میزان ثابت $R$ را میان واحدهای تصمیم‌گیرنده اختصاص دهیم. هزینه متناظر با $DMU_j$ را به‌صورت $R_j \geq 0$ در نظر می‌گیریم. همچنین قرار دهید $\sum_{j=1}^{n} R_j = R$.

به‌منظور ارزیابی کارایی واحد $DMU_o$ که این واحد یکی از واحدهای مشاهده‌شده $DMU_j$ می‌باشد. هزینه جدید تخصیص‌یافته به هر واحد تصمیم‌گیرنده را به‌عنوان یک ورودی جدید در نظر می‌گیریم. فرض کنید وزن متناظر با ورودی $ith$ را به‌صورت $v_i, i = 1, \dots m$ و وزن متناظر با خروجی $rth$ را به‌صورت $u_r, r = 1, \dots s$ در نظر می‌گیریم. همچنین وزن متناظر با هزینه تخصیص‌یافته به‌عنوان ورودی $m + 1$ به‌صورت $\boldsymbol{v_{m+1}}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت کارایی واحد $DMU_o$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} + v_{m+1} R_o}.$$

ما فرض می‌کنیم $v_{m+1} > 0$ یعنی هزینه ثابت تخصیص‌یافته به $DMU_j$ نباید ارزیابی کارایی نادیده گرفته شود. برای یافتن مجموعه مشترک از وزن‌های متناظر با مولفه‌های ورودی و خروجی از روش کائو و هانگ [27] استفاده می‌کنیم. فرض کنید کارایی متناظر با واحد $DMU_j$ حاصل از مدل $CCR$ را با $\theta_j^{CCR}$ نشان دهیم. در این صورت مدل ارزیابی کارایی واحد $DMU_o$ در حضور هزینه ثابت تخصیص‌یافته به واحدها بر اساس مجموعه مشترک از وزن‌های متناظر با مولفه‌های ورودی و خروجی به‌صورت زیر ارایه می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} \left| \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_{m+1} R_j} \right|, \\ \text{s.t.} \quad & \\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - v_{m+1} R_j \leq 0, \\ & \sum_{j=1}^{n} R_j = R, \ R_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s. \end{aligned} \qquad (۱)$$

**قضیه ۱-** مقدار تابع هدف بهینه حاصل از **مدل (۵)** به مقدار $\epsilon$ بستگی ندارد.

اثبات: فرض کنید که $(u, v, v_{m+1})$ و $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{v}_{m+1})$ دو جواب بهینه از **مدل (۵)** متناظر مقادیر متفاوت $\epsilon = t_1$ و $\epsilon = t_2$ به ترتیب باشند. ما نشان می‌دهیم که

$$\left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_{m+1} R_j} \right\rceil = \left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right\rceil.$$

به‌طور واضح $\frac{t_2}{t_1}(u, v, v_{m+1})$ نیز یک جواب شدنی از **مدل (۱)** برای $\epsilon = t_2$ می‌باشد؛ بنابراین

$$\left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_{m+1} R_j} \right\rceil \geq \left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right\rceil.$$

در مقابل ادعای ما، فرض کنید که

$$\left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_{m+1} R_j} \right\rceil > \left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right\rceil.$$

با یک بحث مشابه ما نشان می‌دهیم که $\frac{t_1}{t_2}(\hat{u}, \hat{v}, \hat{v}_{m+1})$

نیز یک جواب شدنی برای **مدل (۱)** برای $\epsilon = t_1$ می‌باشد؛ بنابراین مقدار تابع هدف

$$\left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{v}_i x_{ij} + \left(\frac{t_1}{t_2}\right) \hat{v}_{m+1} R_j} \right\rceil \geq \left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \hat{u}_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \hat{v}_i x_{ij} + \hat{v}_{m+1} R_j} \right\rceil,$$

کمتر یا مساوی با مقدار تابع هدف

$$\left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_{m+1} R_j} \right\rceil = \left\lceil \theta_j^{CCR} - \frac{\sum_{r=1}^{s} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_i x_{ij} + \left(\frac{t_2}{t_1}\right) v_{m+1} R_j} \right\rceil,$$

که غیرممکن می‌باشد. در نتیجه مقدار تابع هدف **مدل (۱)** برای هر مقدار متفاوت $\epsilon > 0$ یکسان می‌باشد و اثبات کامل می‌گردد. **مدل (۱)** یک مدل غیرخطی می‌باشد. آما می‌توان آن را به یک مدل خطی تبدیل نمود. ما میدانیم که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده $DMU_j$ مقدار کارایی حاصل از مدل $CCR$ یعنی $\theta_j^{CCR}$ همواره بزرگتر یا مساوی از مقدار کارایی این واحد بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک می‌باشد؛ زیرا بر اساس مدل $CCR$ واحد تحت ارزیابی در مقابل سایر واحدها، در بهترین شرایط ارزیابی می‌گردد؛ بنابراین خواهیم داشت

$$\theta_j^{CCR} \geq \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + v_{m+1R_j}}. \qquad (۲)$$

با توجه به **رابطه (۲)** خواهیم داشت.

$$\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} v_{m+1} R_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \geq 0. \qquad (۳)$$

با توجه به **رابطه (۳)**، **مدل (۱)** به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{aligned} \min \ & \sum_{j=1}^{n} \left( \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} v_{m+1} R_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \right), \\ & s.t. \ \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - v_{m+1} R_j \leq 0, \\ & \sum_{j=1}^{n} R_j = R, \ R_j \geq 0, j = 1, \dots, n, \\ & u_r \geq \epsilon, r = 1, \dots, s, \quad v_i \geq \epsilon, i = 1, \dots, m+1. \end{aligned} \qquad (۴)$$

برای خطی سازی **مدل (۴)**، به‌صورت زیر قرار می‌دهیم

$$v_{m+1}R_j = r_j, j = 1, \dots, n.$$

بنابراین **مدل (۴)** به‌صورت زیر به **مدل خطی (۵)** تبدیل می‌گردد:

$$\min \sum_{j=1}^{n} \left( \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \right),$$

$$s.t. \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - r_j \le 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} r_j = v_{m+1}R, \; r_j \ge 0, j = 1, \dots, n,$$
$$u_r \ge \epsilon, r = 1, \dots, s,$$
$$v_i \ge \epsilon, i = 1, \dots, m+1,$$
$$r_j \ge 0, j = 1, \dots, n.$$

با توجه به **قضیه ۱** جواب بهینه **مدل (۵)** برای هر مقدار متفاوت $\epsilon > 0$ یکسان می‌باشد؛ البته برای حل **مدل (۵)** آن را مخالف صفر انتخاب می‌کنیم.

## ۳- تخصیص هزینه ثابت بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار و مجموعه وزن‌های مشترک

در این بخش یک طرح تخصیص هزینه ثابت را بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌ها با مجموعه وزن مشترک ارایه می‌دهیم. با توجه به اینکه داده‌های ورودی و خروجی را به‌صورت اعداد نادقیق در یک محیط نامطمئن در نظر می‌گیریم، لذا از روش بهینه‌سازی استوار برای خطی سازی مدل تحلیل پوششی داده‌ها استفاده می‌کنیم. ما فرمول‌بندی **مدل (۵)**، در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های نادقیق را بر اساس بهینه‌سازی استوار به‌دست می‌آوریم. فرض کنید که انحراف مقیاس شده[1] از یک مقدار ورودی اسمی از $ith$ ورودی $DMU_j$ یعنی $x_{ij}$ به‌صورت $\tau_{ij}^x = \frac{\tilde{x}_{ij} - x_{ij}}{\hat{x}_{ij}}$ وقتی $i = 1, \dots, m,$ و $j = 1, \dots, n$ باشند. $x_{ij}$ ورودی نامطمئن $ith$ از $DMU_j$ و $\hat{x}_{ij} = e^x x_{ij}$ دقت تخمین می باشد. $e^x$ سطح آشفتگی یا سطح عدم قطعیت (درصد آشفتگی) را نشان میدهد.

ما فرض می‌کنیم که انحراف مقیاس شده یعنی $\tau_{ij}^x$ یک متغیر تصادفی می‌باشد که دارای مقدار نامعلوم می‌باشد؛ اما دارای توزیع متقارن می‌باشد و مقادیر آن در بازه $[-1,1]$ می‌باشد. در صورتی‌که متغیر انحراف مقیاس شده برابر صفر باشد یعنی $\tau_{ij}^x = 0$ آنگاه $\tilde{x}_{ij}$ دارای مقدار معین و مطمئن می‌باشد. همچنین فرض کنید که $IP_j^x$ نشان دهنده مجموعه اندیس‌های ورودی از $DMU_j$ باشند که دارای مقادیر نامطمئن می‌باشند. فرض کنید $\sum_{i \in IP_j^x} |\tau_{ij}^x| \le \delta_j^x, \; j = 1, \dots, n,$ پارامتر $\delta_j^x \in [0, |IP_j^x|], j = 1, \dots, n,$ که لزوما یک عدد صحیح نمی‌باشد، اما ما برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که یک عدد صحیح باشد. به‌طور مشابه فرض کنید که انحراف مقیاس شده از یک مقدار خروجی اسمی از $rth$ ورودی $DMU_j$ یعنی $y_{rj}$ به‌صورت $\tau_{rj}^y = \frac{y_{rj} - y_{rj}}{\hat{y}_{rj}}$ وقتی $r = 1, \dots, s,$ و $j = 1, \dots, n$ باشند. $y_{rj}$ ورودی نامطمئن $rth$ از $DMU_j$ و $\hat{y}_{rj} = e^y y_{rj}$ دقت تخمین می باشد. $e^y$ سطح آشفتگی یا سطح عدم قطعیت (درصد آشفتگی) را نشان می‌دهد.

ما فرض می‌کنیم که انحراف مقیاس شده یعنی $\tau_{rj}^y$ یک متغیر تصادفی می‌باشد که دارای مقدار نامعلوم می‌باشد؛ اما دارای توزیع متقارن می‌باشد و مقادیر آن در بازه $[-1,1]$ می‌باشد. در صورتیکه متغیر انحراف مقیاس شده برابر صفر باشد یعنی $\tau_{rj}^y = 0$ آنگاه $y_{rj}$ دارای مقدار معین و مطمئن می‌باشد. همچنین فرض کنید که $OP_j^y$ نشان دهنده مجموعه اندیس‌های خروجی از $DMU_j$ باشند که دارای مقادیر نامطمئن می‌باشند. فرض کنید

[1] Scaled deviation

پارامتر $\delta_j^y \in \left[0, \left|OP_j^y\right|\right], j = 1, .., n,$ که لزوما یک عدد صحیح نمی‌باشد، اما ما برای سادگی کار، فرض $\sum_{r\in OP_j^y} \left|\tau_{rj}^y\right| \le \delta_j^y,\ j = 1, \dots, n,$ می‌کنیم که یک عدد صحیح باشد.

اکنون **مدل (۵)** در حضور داده‌های نادقیق بر اساس بهینه‌سازی استوار ارایه می‌دهیم. بدین منظور در ابتدا هر عبارت در مجموع تابع هدف از **مدل (۵)** را با در نظر گرفتن مقادیر غیرقطعی از ورودی‌ها و خروجی‌ها به‌صورت $x_{ij} = \tau_{ij}^x \hat{x}_{ij} + x_{ij}$ و $y_{rj} = \tau_{rj}^y \hat{y}_{rj} + y_{rj}$ به‌صورت اعداد استوار را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} \\ = \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \theta_j^{CCR} \sum_{i\in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \sum_{r\in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y.\end{aligned} \qquad (۶)$$

همچنین قید اول در **مدل (۵)** به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - r_j = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - r_j + \sum_{r\in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y - \sum_{i\in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x \le 0. \qquad (۷)$$

با توجه به اینکه $\sum_{i\in IP_j^x} \left|\tau_{ij}^x\right| \le \delta_j^x,\ j = 1, \dots, n,$ و $\sum_{r\in OP_j^y} \left|\tau_{rj}^y\right| \le \delta_j^y,\ j = 1, \dots, n,$؛ بنابراین **مدل (۵)** را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned}\min \sum_{j=1}^{n} \Bigg( & \theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \max_{\substack{\sum_{i\in IP_j^x} \left|\tau_{ij}^x\right| \le \delta_j^x, \sum_{r\in OP_j^y} \left|\tau_{rj}^y\right| \le \delta_j^y, \\ -1\le\tau_{ij}^x\le 1, -1\le\tau_{rj}^y\le 1}} \left\{ \theta_j^{CCR} \sum_{i\in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \sum_{r\in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y \right\} \Bigg), \\ s.t.\ & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - r_j + \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \max_{\substack{\sum_{i\in IP_j^x} \left|\tau_{ij}^x\right| \le \delta_j^x, \sum_{r\in OP_j^y} \left|\tau_{rj}^y\right| \le \delta_j^y, \\ -1\le\tau_{ij}^x\le 1, -1\le\tau_{rj}^y\le 1}} \left\{ \sum_{r\in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y - \sum_{i\in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x \right\} \le 0, \\ & \sum_{j=1}^{n} r_j = v_{m+1} R,\ r_j \ge 0, j = 1, \dots, n, \\ & u_r \ge \epsilon, r = 1, \dots, s, \\ & v_i \ge \epsilon, i = 1, \dots, m+1, \\ & r_j \ge 0, j = 1, \dots, n.\end{aligned} \qquad (۸)$$

هر عبارت در مجموع تابع هدف از **مدل (۸)** به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\theta_j^{CCR} \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} + \theta_j^{CCR} r_j - \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} + \max_{\substack{\sum_{i\in IP_j^x} \left|\tau_{ij}^x\right| \le \delta_j^x, \sum_{r\in OP_j^y} \left|\tau_{rj}^y\right| \le \delta_j^y, \\ -1\le\tau_{ij}^x\le 1, -1\le\tau_{rj}^y\le 1}} \left\{ \theta_j^{CCR} \sum_{i\in IP_j^x} v_i \hat{x}_{ij} \tau_{ij}^x - \sum_{r\in OP_j^y} u_r \hat{y}_{rj} \tau_{rj}^y \right\}.$$

به‌علاوه ما مساله داخلی در تابع هدف **مدل (۸)** را ساده می‌کنیم. بدین منظور در ابتدا ناحیه شدنی از مساله داخلی در تابع هدف **مدل (۸)** را به‌صورت

$$\left\{\left(\tau_{ij}^{x},\tau_{rj}^{y}\right)\middle|\begin{matrix}\sum_{i\in IP_j^x}\left|\tau_{ij}^{x}\right|\le\delta_j^x,\sum_{r\in OP_j^y}\left|\tau_{rj}^{y}\right|\le\delta_j^y,\\ -1\le\tau_{ij}^{x}\le 1,-1\le\tau_{rj}^{y}\le 1\end{matrix}\right\} \qquad (۹)$$

را با ناحیه زیر جایگزین می‌کنیم.

$$\left\{\left(\tau_{ij}^{x},\tau_{rj}^{y}\right)\middle|\begin{matrix}\sum_{i\in IP_j^x}\tau_{ij}^{x}\le\delta_j^x,\sum_{r\in OP_j^y}\tau_{rj}^{y}\le\delta_j^y,\\ 0\le\tau_{ij}^{x}\le 1,0\le\tau_{rj}^{y}\le 1\end{matrix}\right\}. \qquad (۱۰)$$

بنابراین مساله داخلی در تابع هدف **مدل (۸)** به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم و عبارت را به‌صورت حاصل جمع در نظر می‌گیریم.

$$\max\left\{\theta_j^{CCR}\sum_{i\in IP_j^x}v_i\hat{x}_{ij}\tau_{ij}^{x}+\sum_{r\in OP_j^y}u_r\hat{y}_{rj}\tau_{rj}^{y}\right\},$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\quad \textstyle\sum_{i\in IP_j^x}\tau_{ij}^{x}\le\delta_j^x,\quad j=1,\dots,n,\\
&\textstyle\sum_{r\in OP_j^y}\tau_{rj}^{y}\le\delta_j^y, j=1,\dots,n,\\
&\tau_{ij}^{x}\le 1,\quad i\in IP_j^x,\quad j=1,\dots,n,\\
&\tau_{rj}^{y}\le 1,\ r\in OP_j^y,\quad j=1,\dots,n,\\
&0\le\tau_{ij}^{x}, i\in IP_j^x,\quad j=1,\dots,n,\\
&0\le\tau_{rj}^{y}, r\in OP_j^y, j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

دوآل **مدل (۱۱)** به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\min\quad\sum_{i\in IP_j^x}\mu_{ij}^{x}+\sum_{r\in OP_j^y}\mu_{rj}^{y}+\gamma_j^x\delta_j^x+\gamma_j^y\delta_j^y,$$

$$\begin{aligned}
&s.t.\quad \mu_{ij}^{x}+\gamma_j^x\ge v_i\hat{x}_{ij}\theta_j^{CCR}, i\in IP_j^x,\\
&\mu_{rj}^{y}+\gamma_j^y\ge u_r\hat{y}_{rj}, r\in OP_j^y,\\
&\mu_{ij}^{x}\ge 0,\ i\in IP_j^x,\ \mu_{rj}^{y}\ge 0, r\in OP_j^y,\\
&\gamma_j^x\ge 0,\gamma_j^y\ge 0, j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

به‌طور مشابه محاسبات انجام‌شده برای مساله داخلی تابع هدف **مدل (۸)**، قید اول در **مدل (۸)** را در نظر می‌گیریم و مساله داخلی آن را به‌صورت زیر می‌نو یسیم:

$$\max\left\{\sum_{r\in OP_j^y}u_r\hat{y}_{rj}\tau_{rj}^{y}+\sum_{i\in IP_j^x}v_i\hat{x}_{ij}\tau_{ij}^{x}\right\}, \qquad (۱۰)$$

$$s.t.\quad \textstyle\sum_{i\in IP_j^x}\tau_{ij}^{x}\le\delta_j^x,\quad j=1,\dots,n,$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r\in OP_j^y}\tau_{rj}^y \le \delta_j^y, j=1,\dots,n,\\
&\tau_{ij}^x \le 1,\quad i\in IP_j^x,\quad j=1,\dots,n,\\
&\tau_{rj}^y \le 1,\ r\in OP_j^y,\quad j=1,\dots,n,\\
&0\le \tau_{ij}^x, i\in IP_j^x,\quad j=1,\dots,n,\\
&0\le \tau_{rj}^y, r\in OP_j^y, j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

دواآل **مدل (۱۳)** به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\min\quad &\sum_{i\in IP_j^x}\eta_{ij}^x+\sum_{r\in OP_j^y}\eta_{rj}^y+\sigma_j^x\delta_j^x+\sigma_j^y\delta_j^y,\\
s.t.\quad &\eta_{ij}^x+\sigma_j^x\ge v_i\hat{x}_{ij}, i\in IP_j^x,\\
&\eta_{rj}^y+\sigma_j^y\ge u_r\hat{y}_{rj}, r\in OP_j^y,\\
&\eta_{ij}^x\ge 0,\ i\in IP_j^x, \eta_{rj}^y\ge 0, r\in OP_j^y,\\
&\sigma_j^x\ge 0, \sigma_j^y\ge 0,. j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۴)$$

با جایگذاری **مدل‌های (۱۲)** و **(۱۴)** در **مدل (۸) و مدل (۱۵)** به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}
\min\ &\sum_{j=1}^n\left(\theta_j^{CCR}\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}+\theta_j^{CCR}r_j-\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}+\sum_{i\in IP_j^x}\mu_{ij}^x+\sum_{r\in OP_j^y}\mu_{rj}^y+\gamma_j^x\delta_j^x+\gamma_j^y\delta_j^y\right)\\
s.t.\ &\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}-\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}-r_j+\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}+\sum_{i\in IP_j^x}\eta_{ij}^x+\sum_{r\in OP_j^y}\eta_{rj}^y+\sigma_j^x\delta_j^x+\sigma_j^y\delta_j^y\le 0,\\
&\sum_{j=1}^n r_j=v_{m+1}R,\\
&\mu_{ij}^x+\gamma_j^x\ge v_i\hat{x}_{ij}\theta_j^{CCR}, i\in IP_j^x,\\
&\mu_{rj}^y+\gamma_j^y\ge u_r\hat{y}_{rj}, r\in OP_j^y,\\
&\eta_{ij}^x+\sigma_j^x\ge v_i\hat{x}_{ij}, i\in IP_j^x,\\
&\eta_{rj}^y+\sigma_j^y\ge u_r\hat{y}_{rj}, r\in OP_j^y,\\
&\mu_{ij}^x\ge 0,\ i\in IP_j^x, \mu_{rj}^y\ge 0, r\in OP_j^y,\\
&\gamma_j^x\ge 0, \gamma_j^y\ge 0, j=1,\dots,n,\\
&\eta_{ij}^x\ge 0,\ i\in IP_j^x, \eta_{rj}^y\ge 0, r\in OP_j^y,\\
&\sigma_j^x\ge 0, \sigma_j^y\ge 0, j=1,\dots,n,\\
&u_r\ge\epsilon, r=1,\dots,s,\\
&v_i\ge\epsilon, i=1,\dots,m+1,\\
&r_j\ge 0, j=1,\dots,n.
\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

**مدل (۱۵)** را مدل تحلیل پوششی داده‌های استوار بر اساس مجموعه مشترک وزن‌ها برای به دست آوردن میزان تخصیص هرینه ثابت به هر یک از واحدهای تصمیم‌گیرنده در حضور داده‌های نادقیق می‌نامیم.

## ۴- ارزیابی عملکرد بانک‌های تجاری در ایران

بانک‌های تجاری نقش مهمی در برنامه‌های توسعه یک کشور دارند. عملکرد مناسب بانک‌ها می‌تواند عملکرد سایر صنایع وابسته را نیز بهبود ببخشد؛ زیرا این بانک‌ها می‌توانند به سایر صنایع نظیر کارخانه‌ها تسهیلات پرداخت نمایند و پویایی این صنایع را ایجاد کنند. یکی از موضوعات

مهم در نظام بانکداری، ارزیابی عملکرد بانک‌ها در طول یک دوره زمانی می‌باشد. به‌کارگیری یک ابزار دقیق برای ارزیابی عملکرد بسیار حائز اهمیت می‌باشد. یکی از تکنیک‌های مناسب برای ارزیابی عملکرد و اندازه‌گیری کارایی بانک‌ها تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد تحلیل پوششی داده‌ها علاوه بر مشخص کردن نمره کارایی بانک‌ها می‌توانند آن‌ها را نیز از نقطه نظر کارایی رتبه‌بندی کند و نقاط ضعف و قوت آن‌ها را ارایه دهد. همچنین می‌تواند اهداف مناسب متناظر با ورودی‌ها و خروجی‌های بانک‌ها را نیز ارایه دهد.

اما ممکن است اطلاعات مربوط به ورودی‌ها و خروجی‌های یک بانک نادقیق باشند و دارای یک‌میزان تغییر در طول دوره ارزیابی باشند. به‌عنوان‌مثال ممکن است یک داده دارای یک میزان نوسان باشد و نتوان آن را به‌صورت دقیق تعیین نمود؛ اما می‌توان تعیین نمود که این داده در یک بازه مشخص قرار دارد. از تقریب ارایه‌شده در این مقاله می‌توان برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده در شرایط نامطمئن استفاده نمود و بانک‌ها را در یک شرایط یکسان در حضور داده‌های نامطمئن ارزیابی نمود.

در این بخش از تقریب ارایه‌شده در این مقاله برای ارزیابی عملکرد بانک‌های تجاری در کشور ایران استفاده می‌کنیم. اطلاعات مربوط به این بانک‌ها از طریق سایت بانک مرکزی در دسترس می‌باشد. می‌توان بیان داشت که علت انتخاب این بانک‌ها برای ارزیابی این است که نو یسندگان سعی داشتند از داده‌های واقعی برای نشان دادن کاربردی از تقریب خود استفاده نمایند. همچنین این نتایج می‌تواند به مدیران بانک در اتخاذ تصمیمات مناسب برای بهبود عملکرد بانک‌ها کمک نماید. داده‌های ورودی و خروجی در **جدول‌های ۱** و **۲** آمده است. در این ارزیابی برای هر یک از بانک‌ها سه ورودی و سه خروجی را انتخاب می‌کنیم. ورودی‌ها شامل هزینه‌های پرسنلی، هزینه‌های خالص بهره و هزینه‌های غیر بهره می‌باشند. هزینه‌های پرسنلی شامل هزینه‌هایی می‌باشد که بانک در طول این دوره ارزیابی برای پرسنل خود پرداخت می‌کند. این هزینه‌ها شامل حقوق و دستمزد، بیمه، مزایا و پاداش‌ها، اضافه‌کاری، بیمه و درمان می‌باشند. هزینه‌های خالص بهره میزان سود پرداخت‌شده به مشتریان بانک می‌باشد. مشتریان سپرده‌های خود را نزد بانک بر اساس یک قرارداد معین قرار می‌دهند. بانک برای هر سپرده یک سود را در نظر می‌گیرد. مجموع کل مبالغ پرداخت‌شده به مشتریان در طول دوره ارزیابی برای این سپرده‌ها را هزینه خالص بهره می‌نامیم.

هزینه‌های غیر بهره شامل هزینه‌هایی است که مستقیما با جذب و نگهداری وجوه سپرده‌گذاری مرتبط نیستند. این هزینه‌ها شامل هزینه‌های بانک در موارد مختلف شامل اجاره ساختمان، هزینه‌های مربوط به نگهداری اموال بانک، هزینه‌های جاری بانک، هزینه‌های ایجاد و نگهداری امکانات نرم‌افزاری و سخت‌افزاری، هزینه‌های خدماتی نظیر هزینه‌های آب و برق و گاز و انرژی می‌باشند. سه خروجی نیز در این ارزیابی مورد توجه قرار گرفتند. خروجی‌ها شامل درآمدهای خالص بهره، درآمدهای ناخالص بهره و کل سپرده‌های بانک می‌باشند.

درآمد خالص بهره: شامل درآمدهایی است که بانک از محل دادن تسهیلات وام به مشتریان به دست می‌آورد. این نرخ بهره توسط بانک بر اساس این قرارداد با مشتریان تعیین می‌گردد. این درآمدها حاصل از کم کردن کل مبلغ اخذشده از مشتریان منهای مقدار وام داده‌شده به آن‌ها می‌باشد.

درآمدهای غیر بهره: این درآمدها شامل درآمدهای بانک، غیر از بهره‌های بانکی می‌باشد. این درآمدها شامل درآمد کسب‌شده از مشتریان از محل خدمات مختلف شامل کارمزدهای مختلف، درآمد حاصل از انتقال وجوه مختلف توسط مشتریان، دستگاه‌های خودپرداز، درآمدهای حاصل از حواله‌های بین بانکی، درآمد حاصل از خدمات اینترنتی، کارمزد مربوط به ارسال پیامک به مشتریان و ... می‌باشد.

کل سپرده‌ها: این سپرده‌ها شامل سپرده‌های جاری، سپرده‌های کوتاه‌مدت و سپرده‌های بلندمدت می‌باشند. هر اندازه میزان کل سپرده‌ها بزرگتر باشد در نتیجه نقدینگی بانک بالا می‌رود و بانک می‌تواند به مشتریان خود تسهیلات پرداخت کند و در نتیجه می‌تواند از محل پرداخت تسهیلات سود بالاتری را دریافت کند.

داده‌های ورودی و خروجی از بانک‌ها در **جدول‌های ۲** و **۳** آمده‌اند.

جدول ۲- داده‌های ورودی از بانک‌های تجاری در ایران.

**Table 2- Input data from commercial banks in Iran.**

| بانک‌ها | ورودی‌ها | | |
|---|---|---|---|
| | هزینه‌های پرسنلی | هزینه‌های خالص بهره | هزینه‌های غیر بهره |
| B01 | 317.89 | 299.49 | 545.79 |
| B02 | 378.32 | 278.51 | 631.92 |
| B03 | 517.17 | 426.61 | 969.23 |
| B04 | 416.64 | 472.69 | 828.88 |
| B05 | 492.51 | 250.37 | 1123.39 |
| B06 | 179.2 | 250.75 | 323.73 |
| B07 | 946.59 | 734.53 | 1861.31 |
| B08 | 414.16 | 1943.06 | 1444.78 |
| B09 | 29.8 | 226.1 | 62.22 |
| B10 | 44.36 | 206.74 | 74.83 |
| B11 | 4.88 | 60.65 | 1.52 |
| B12 | 32.8 | 161.31 | 96.26 |
| B13 | 21.17 | 24.45 | 55.48 |
| B14 | 293.1 | 1042.17 | 733.04 |
| B15 | 69.71 | 153.84 | 158.58 |
| B16 | 36.32 | 92.7 | 58.33 |
| B17 | 100.94 | 292.27 | 215.88 |
| B18 | 273.25 | 1001.94 | 618.34 |
| B19 | 77.44 | 238.72 | 173.97 |
| B20 | 224.13 | 700.13 | 477.47 |
| B21 | 4.39 | 4.79 | 10.64 |
| B22 | 691.81 | 4978.76 | 1543.7 |
| B23 | 609.89 | 1885.35 | 2006.85 |
| B24 | 528.57 | 4739.71 | 1008.21 |
| B25 | 871.17 | 2544.86 | 2010.64 |
| B26 | 11.76 | 21.82 | 27.61 |
| B27 | 557.66 | 2285.09 | 1265.91 |

جدول ۳- داده‌های خروجی از بانک‌های تجاری در ایران.

**Table 3- Output data from commercial banks in Iran.**

| بانک‌ها | خروجی‌ها | | |
|---|---|---|---|
| | درآمد خالص بهره | درآمدهای غیر بهره | کل سپرده‌ها |
| B01 | 1320.56 | 245.84 | 37054.91 |
| B02 | 1397.76 | 455.76 | 38374.35 |
| B03 | 2217.63 | 775.55 | 65284.05 |
| B04 | 1552.24 | 961.04 | 59446.67 |
| B05 | 1839.47 | 549.84 | 54976.85 |
| B06 | 619.12 | 152.08 | 18057.09 |
| B07 | 4476.56 | 1374.35 | 125038.24 |
| B08 | 2787.97 | 709.58 | 39390.93 |
| B09 | 91.86 | 27.63 | 2464.75 |
| B10 | 98.86 | 78.54 | 3317.07 |
| B11 | 1.39 | 2.16 | 32.25 |
| B12 | 94.57 | 26.19 | 1901.54 |
| B13 | 138.51 | 53.5 | 2001.94 |
| B14 | 1477.93 | 551.42 | 24874.5 |
| B15 | 173.32 | 136.03 | 4164.14 |
| B16 | 61.35 | 45.13 | 1567.28 |
| B17 | 411.45 | 85.76 | 5404.07 |
| B18 | 1384.41 | 30 | 17598.12 |
| B19 | 223.95 | 62.99 | 4061.78 |
| B20 | 842.54 | 37.09 | 12623.39 |
| B21 | 6.53 | 5.44 | 159.13 |
| B22 | 5047.84 | 398.23 | 93567.68 |
| B23 | 3422.38 | 1167.37 | 48354.12 |
| B24 | 2630.84 | 252.98 | 63029.72 |
| B25 | 3917.8 | 1300.21 | 54898.37 |
| B26 | 14.19 | 7.09 | 307.03 |
| B27 | 2430.37 | 1059.02 | 35605.78 |

در ابتدا به ارزیابی عملکرد بانک‌ها بر اساس مدل *CCR* در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. نتایج ارزیابی کارایی بانک‌ها در **جدول ۴** آمده است.

**جدول ۴- کارایی حاصل از مدل CCR از بانک‌ها.**
**Table 4- Efficiency derived from the CCR model of banks.**

| بانک‌ها | کارایی | بانک‌ها | کارایی |
|---|---|---|---|
| B01 | 1 | B15 | 0.8109 |
| B02 | 0.9281 | B16 | 0.6634 |
| B03 | 0.9904 | B17 | 0.693 |
| B04 | 1 | B18 | 0.7928 |
| B05 | 1 | B19 | 0.4808 |
| B06 | 0.8162 | B20 | 0.6344 |
| B07 | 1 | B21 | 0.5225 |
| B08 | 0.9833 | B22 | 1 |
| B09 | 0.5929 | B23 | 0.8446 |
| B10 | 0.8985 | B24 | 0.9582 |
| B11 | 1 | B25 | 0.7478 |
| B12 | 0.4711 | B26 | 0.2479 |
| B13 | 1 | B27 | 0.8234 |
| B14 | 0.81 | میانگین کارایی | 0.8041 |

نمره کارایی بانک‌ها در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در **جدول ۳** آمده است. در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت، بانک‌های *B01, B04, B05, B07, B11, B13, B22* کارا و سایر بانک‌ها ناکارا می‌باشند.

فرض کنید مدیریت بانک بخواهد یک هزینه ثابت به میزان ۲۵۰۰ میلیون ریال را به این بانک‌های تجاری تخصیص دهیم. بدین منظور مدل‌های ارایه‌شده در این مقاله را در دو حالت دقیق در شرایط اطمینان (**مدل (۵)**) و نادقیق در شرایط عدم اطمینان (**مدل (۱۵)**) حل می‌کنیم. در ابتدا **مدل (۵)** را حل می‌کنیم. برای حل مدل‌ها ما قرار می‌دهیم $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$ نتایج در **جدول ۵** آمده است.

**جدول ۵- هزینه تخصیصی به بانک‌ها حاصل از مدل (۵).**
**Table 5- Cost allocated to banks resulting from Model (5).**

| بانک‌ها | هزینه تخصیصی | بانک‌ها | هزینه تخصیصی |
|---|---|---|---|
| B01 | 145.4352 | B15 | 0 |
| B02 | 167.4373 | B16 | 0 |
| B03 | 305.0622 | B17 | 0 |
| B04 | 199.4731 | B18 | 11.1904 |
| B05 | 0 | B19 | 0 |
| B06 | 20.0536 | B20 | 0 |
| B07 | 644.9789 | B21 | 0 |
| B08 | 49.3754 | B22 | 549.8352 |
| B09 | 0 | B23 | 0 |
| B10 | 0 | B24 | 0 |
| B11 | 0 | B25 | 175.5848 |
| B12 | 0 | B26 | 0 |
| B13 | 24.2205 | B27 | 112.0741 |
| B14 | 95.2794 | مجموع هزینه | 2500 |

همان‌طور که مشاهده می‌گردد هزینه اختصاص‌یافته به بانک‌های تجاری متناظر با مقدار کارایی و مقادیر ورودی و خروجی از آن‌ها می‌باشد. همچنین مقدار کارایی واحدها نسبت به مقدار کارایی آن‌ها بر اساس مدل *CCR* در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت افزایش می‌یابد. نتایج در **جدول ۶** آمده است.

**جدول ۶- کارایی حاصل از مدل (۵) در حضور هزینه اختصاصی.**
**Table 6- Efficiency obtained from Model (5) in the presence of dedicated cost.**

| بانک‌ها | کارایی | بانک‌ها | کارایی |
|---|---|---|---|
| B01 | 1 | B15 | 0.7962 |
| B02 | 1 | B16 | 0.7117 |
| B03 | 1 | B17 | 1 |
| B04 | 1 | B18 | 1 |

**جدول ۶- ادامه.**
**Table 6- Continued.**

| بانک‌ها | کارایی | بانک‌ها | کارایی |
|---|---|---|---|
| B05 | 1 | B19 | 0.7038 |
| B06 | 1 | B20 | 0.8274 |
| B07 | 1 | B21 | 0.478 |
| B08 | 1 | B22 | 1 |
| B09 | 0.6875 | B23 | 1 |
| B10 | 0.8379 | B24 | 1 |
| B11 | 0.2058 | B25 | 1 |
| B12 | 0.5227 | B26 | 0.3321 |
| B13 | 1 | B27 | 1 |
| B14 | 1 | میانگین کارایی | 0.8557 |

اکنون مدل تخصیص هزینه ثابت بر اساس مجموعه وزن‌های مشترک و بهینه‌سازی استوار در یک محیط نامطمئن و نادقیق را حل می‌کنیم. در ابتدای شروع آنالیز نتایج، برای در نظر گرفتن محیط نامطمئن داده‌ها، فرض می‌کنیم که تمام داده‌ها شامل ورودی‌ها، خروجی‌ها به‌صورت اعداد نامطمئن می‌باشند. همچنین سطح آشفتگی برای ورودی‌ها خروجی‌ها را برابر با $e^x = e^y = 0.05$ در نظر می‌گیریم؛ بنابراین ما فرض می‌کنیم که ورودی‌ها، خروجی‌ها به‌صورت زیر باشند:

$$x_{ij} \in \left[x_{ij} - 0.05x_{ij}x_{ij} + 0.05x_{ij}\right],$$
$$y_{rj} \in \left[x_{ij} - 0.05y_{rj} + 0.05y_{rj}\right].$$

ما فرض می‌کنیم که میزان آشفتگی ورودی‌ها و خروجی‌ها یکسان باشند، اما می‌توانیم برای آن‌ها سطوح متفاوتی را نظر بگیریم.

$$\delta_j^y \; and \; \delta_j^y \geq \min\left\{n, 1 + \; \varphi^{-1}\; 1 - e)\sqrt{n}\right\}.$$

$\varphi$ تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد است. علاوه بر این، $n$ حداکثر تعداد پارامترهای نامشخص برای هر محدودیت برای محافظت از محدودیت $j$ در برابر اختلال داده است.

انتخاب یک مقدار سطح محافظت برای $\delta_j^y \; or \; \delta_j^y$ تضمین می‌کند که جواب بهینه مورد انتظار این مدل بهینه‌سازی استوار با احتمال بالاتری شدنی باقی بماند. با توجه به اینکه در این ارزیابی ما سه ورودی و سه خروجی مطلوب را داریم. حداکثر شش پارامتر نامطمئن را در مدل خواهیم داشت؛ بنابراین

$$\delta_j^y \; and \; \delta_j^x \in [0,6].$$

مقدار سطح محافظه‌کاری تقریبی مربوطه یعنی $\delta_j^y \; and \; \delta_j^x$ برابر با ۵٫۳۶۵ است که به این معنی است که حفاظت از محدودیت‌ها در برابر ۸۳% از داده‌های نامشخص برای برآورد کارایی قوی کافی است. شایان ذکر است که مدل قوی پیشنهادی دارای انعطاف‌پذیری برای محاسبه سطوح مختلف اغتشاش بر اساس ترجیحات ریسک تصمیم‌گیرنده است. ما همچنین می‌توانیم قرار دهیم.

$$\delta_j^y = \; \delta_j^y = 6.$$

در این صورت **مدل (۱۵)** در مقابل ۱۰۰% از پارامترهای نامطمئن که بدترین مقادیر خود را می‌گیرند حمایت می‌گردد. نتایج حاصل از **مدل (۱۵)** در **جدول ۷** آمده است. برای حل مدل قرار می‌دهیم $\epsilon = 5 \times 10^{-5}$.

**جدول ۷- هزینه تخصیصی به بانک‌ها حاصل از مدل (۱۵).**
**Table 7- Cost allocated to banks resulting from Model (15).**

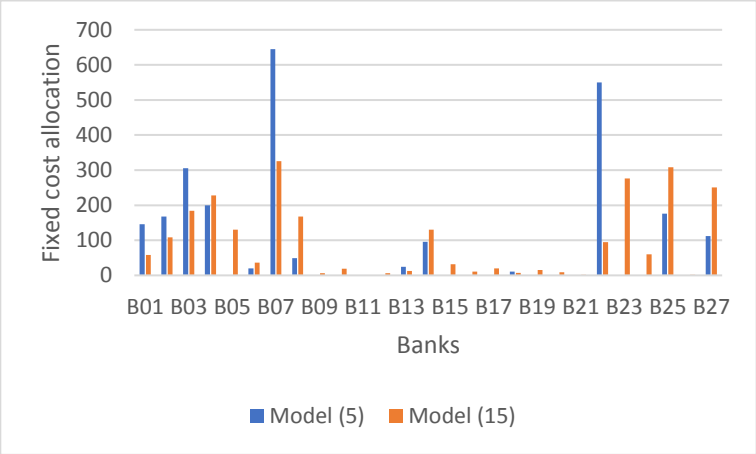
| بانک‌ها | هزینه تخصیصی | بانک‌ها | هزینه تخصیصی |
|---|---|---|---|
| B01 | 58.2514 | B15 | 32.2321 |
| B02 | 107.9916 | B16 | 10.6935 |
| B03 | 183.7653 | B17 | 20.3207 |
| B04 | 227.7169 | B18 | 7.1085 |
| B05 | 130.2837 | B19 | 14.9254 |
| B06 | 36.0351 | B20 | 8.7884 |

جدول ۷- ادامه.

**Table 7- Continued.**

| بانک‌ها | هزینه تخصیصی | بانک‌ها | هزینه تخصیصی |
|---|---|---|---|
| B07 | 325.65 | B21 | 1.289 |
| B08 | 168.1339 | B22 | 94.36 |
| B09 | 6.5469 | B23 | 276.6065 |
| B10 | 18.6099 | B24 | 59.9432 |
| B11 | 0.5118 | B25 | 308.0827 |
| B12 | 6.2057 | B26 | 1.68 |
| B13 | 12.6767 | B27 | 250.9331 |
| B14 | 130.6581 | مجموع هزینه | 2500 |

مطابق نتایج در **جدول ۶**، هزینه اختصاص‌یافته به بانک‌های تجاری متناظر با مقدار کارایی و مقادیر ورودی و خروجی از آن‌ها می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد ما به یک طرح تخصیص هزینه ثابت منصفانه در حضور داده‌های نادقیق دست یافته‌ایم. در **شکل ۱** ما به مقایسه مقادیر هزینه تخصیصی به بانک‌ها بر اساس **مدل‌های (۵)** و **(۱۵)** پرداختیم. همچنین مقدار کارایی واحدها نسبت به مقدار کارایی آن‌ها بر اساس مدل *CCR* در تکنولوژی بازده به مقیاس ثابت در حضور ورودی‌ها و خروجی‌های دقیق افزایش می‌یابد. مقادیر کارایی تمام واحدها بعد از پروسه تخصیص برابر خواهد بود. نتایج در **جدول ۸** آمده است.




**شکل ۱- مقایسه مقادیر هزینه تخصیصی به بانک‌ها بر اساس مدل‌های (۵) و (۱۵).**

**Figure 1- Comparison of cost values allocated to banks based on Models (5) and (15).**

**جدول ۸-کارایی حاصل از مدل (۱۵) در حضور هزینه اختصاصی.**

**Table 8- Efficiency obtained from Model (15) in the presence of dedicated cost.**

| بانک‌ها | کارایی | بانک‌ها | کارایی |
|---|---|---|---|
| B01 | 0.9524 | B15 | 0.9524 |
| B02 | 0.9524 | B16 | 0.9524 |
| B03 | 0.9524 | B17 | 0.9524 |
| B04 | 0.9524 | B18 | 0.9524 |
| B05 | 0.9524 | B19 | 0.9524 |
| B06 | 0.9524 | B20 | 0.9524 |
| B07 | 0.9524 | B21 | 0.9524 |
| B08 | 0.9524 | B22 | 0.9524 |
| B09 | 0.9524 | B23 | 0.9524 |
| B10 | 0.9524 | B24 | 0.9524 |
| B11 | 0.9524 | B25 | 0.9524 |
| B12 | 0.9524 | B26 | 0.9524 |
| B13 | 0.9524 | B27 | 0.9524 |
| B14 | 0.9524 | میانگین کارایی | 0.9524 |

## ۵- نتیجه‌گیری

بررسی یک طرح تخصیص هزینه ثابت با توجه به تضاد منافع افراد و شرکت و نهادها در عین چالش‌برانگیز بودن به یک موضوع حیاتی تبدیل شده است. در بسیاری از موارد دنیای واقعی، تخصیص هزینه ثابت اغلب در یک سازمان اتفاق می‌افتد. تمام بخش‌های مرتبط با سازمان باید هزینه ثابت را به اشتراک بگذارند. در این راستا از رویکردهای متعددی از جمله تحلیل پوششی داده‌ها استفاده می‌گردد. با این حال، رعایت انصاف و تخصیص

عادلانه موضوعی است که استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها در مسایل تخصیص می‌توان آن را قوت بخشید. این پژوهش به بررسی موضوع تخصیص هزینه ثابت بر اساس تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازد. همان‌طور که می‌دانید ارایه یک طرح تخصصی هزینه ثابت مناسب می‌تواند مدیران ارشد سازمان‌ها را در تعالی و پیشرفت سازمان تحت مدیریت خود کمک کند اما ارایه یک طرح تخصیص هزینه ثابت می‌تواند با اهداف متفاوتی انجام شود.

یکی از اهداف تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهبود کارایی از واحدهای تصمیم‌گیرنده می‌باشد. در این مقاله ما از مدل تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک به‌منظور ارایه یک طرح تخصیص هزینه استفاده نمودیم. در دنیای واقعی با موارد زیادی روبرو باشیم که داده‌ها به‌صورت نادقیق می‌باشند. یکی از این دسته داده‌ها، داده‌های استوار می‌باشد. در این مقاله به‌منظور در نظر گرفتن داده‌های نادقیق در مدل ارزیابی عملکرد از بهینه‌سازی استوار در تحلیل پوششی داده‌ها استفاده کردیم. در این راستا مدل تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس مفهوم مجموعه وزن‌های مشترک را به‌منظور ارایه یک طرح تخصیص هزینه ثابت بر اساس بهینه‌سازی استوار در یک محیط نامطمئن توسعه دادیم. در ادامه به ارزیابی عملکرد بانک‌های تجاری در ایران که تحت یک مدیریت واحد فعالیت می‌کنند پرداختیم ما نشان دادیم که بر اساس رویکرد ارایه‌شده در این مقاله می‌توانیم یک میزان هزینه ثابت را به تمام بانک‌ها اختصاص دهیم. به‌عنوان کارهای آتی می‌توان مدل‌های ارایه شده در این مقاله را در سایر تکنولوژی‌ها نظیر بازده به مقیاس متغیر یا غیرمحدب توسعه داد. همچنین می‌توانیم مدل‌های ارایه‌شده در این مقاله را برای ارزیابی کارایی سایر صنایع نظر کارخانه‌ها صنعتی توسعه داد.

## اعلام تعارض منافع

نویسندگان اعلام می‌کنند که هیچ نوع تعارض منافعی وجود ندارد.

## سپاسگزاری

نویسندگان از سردبیر محترم مجله و داوران محترم در فرآیند داوری و اصلاح مقاله تشکر می‌نمایند.

## حمایت مالی

این پژوهش هیچ کمک‌هزینه خاصی از هیچ موسسه سرمایه‌گذار در بخش عمومی تجاری یا غیرانتفاعی دریافت نکرده است.

## منابع

[1] Gerami, J. (2019). An interactive procedure to improve estimate of value efficiency in DEA. *Expert systems with applications*, *137*, 29–45. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2019.06.061
[2] Gerami, J., & Mozaffari, M. R. (2021). Additive slacks-based measure of efficiency for dealing with undesirable outputs based on DEA-R model. *Big data and computing visions*, *1*(1), 15–23. https://doi.org/10.22105/bdcv.2021.142082
[3] Ebrahimi, B., & Tesic, D. (2024). A DEA based performance measurement approach with weak ordinal data. *Systemic analytics*, *2*(2), 229–242. https://doi.org/10.31181/sa22202425
[4] Muniz, S. M., Andriola, W. B., Fátima Muniz, R. de, & Edalatpanah, S. A. (2024). The impacts of covid-19 on postgraduate courses at the Federal University of Ceará (UFC, Brazil). *Optimality*, *1*(1), 1–9. https://doi.org/10.22105/opt.v1i1.18
[5] Mozaffari, M. R., Kamyab, P., Jablonsky, J., & Gerami, J. (2014). Cost and revenue efficiency in DEA-R models. *Computers & industrial engineering*, *78*, 188–194. https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.001
[6] Gerami, J., Mozaffari, M. R., Wanke, P. F., & Correa, H. L. (2022). Improving information reliability of non-radial value efficiency analysis: An additive slacks based measure approach. *European journal of operational research*, *298*(3), 967–978. https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.001
[7] Cook, W. D., & Kress, M. (1999). Characterizing an equitable allocation of shared costs: A DEA approach. *European journal of operational research*, *119*(3), 652–661. https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00337-3
[8] Cook, W. D., & Zhu, J. (2005). Allocation of shared costs among decision making units: A DEA approach. *Computers & operations research*, *32*(8), 2171–2178. https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.02.007
[9] Lin, R. (2011). Allocating fixed costs and common revenue via data envelopment analysis. *Applied mathematics and computation*, *218*(7), 3680–3688. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.011
[10] Qingxian, A., Wang, P., Emrouznejad, A., & Hu, J. (2020). Fixed cost allocation based on the principle of efficiency invariance in two-stage systems. *European journal of operational research*, *283*(2), 662–675. https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377221719309427

[11] Chu, J., Wang, S., Feng, L., & and Yuan, Z. (2023). Individual rationality and overall fairness in fixed cost allocation: An approach under DEA cross-efficiency evaluation mechanism. *Journal of the operational research society*, *74*(3), 992–1007. https://doi.org/10.1080/01605682.2022.2079434
[12] Zhang, D., Wu, H., Li, F., & Song, Y. (2024). Fixed cost allocation based on a data envelopment analysis aggressive game approach. *Computers & industrial engineering*, *193*, 110316. https://doi.org/10.1016/j.cie.2024.110316
[13] An, Q., Tao, X., Xiong, B., & Chen, X. (2022). Frontier-based incentive mechanisms for allocating common revenues or fixed costs. *European journal of operational research*, *302*(1), 294–308. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.12.039
[14] Hosseinzadeh Saljooghi, F., Pishgooy, A. R., & Hamidi, F. (2024). Fair allocation of fixed costs in one- and two-stage systems using data envelopment analysis. *Innovation management and operational strategies*, *5*(3), 348–367. (**In Persian**). https://doi.org/10.22105/imos.2024.453236.1350
[15] Hatami-Marbini, A., Emrouznejad, A., & Tavana, M. (2011). A taxonomy and review of the fuzzy data envelopment analysis literature: Two decades in the making. *European journal of operational research*, *214*(3), 457–472. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2011.02.001
[16] Olesen, O. B., & Petersen, N. C. (2016). Stochastic data envelopment analysis—A review. *European journal of operational research*, *251*(1), 2–21. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.07.058
[17] Montazeri, F. Z. (2020). An overview of data envelopment analysis models in fuzzy stochastic environments. *Journal of fuzzy extension and applications*, *1*(4), 272–278. https://doi.org/10.22105/jfea.2020.258330.1030
[18] Rasoulzadeh, M., Edalatpanah, S. A., Fallah, M., & Najafi, S. E. (2024). Combining markowitz mean-variance models with trapezoidal fuzzy returns and cross-efficiency data envelopment analysis with network structure to find the optimal investment portfolio. *Journal of decisions and operations research*, *9*(4), 968-984. (**In Persian**). https://doi.org/10.22105/dmor.2023.396910.1743
[19] Najafi, S. E. (2024). The impact of entrepreneurial orientation, organizational learning, and service innovation on organizational performance (Case study: Parsian Insurance). *Modern research in performance evaluation*, *3*(3), 176-184. (**In Persian**). https://doi.org/10.22105/mrpe.2024.480336.1113
[20] Hatami-Marbini, A., & Arabmaldar, A. (2021). Robustness of Farrell cost efficiency measurement under data perturbations: Evidence from a US manufacturing application. *European journal of operational research*, *295*(2), 604–620. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.03.019
[21] Sadjadi, S. J., & Omrani, H. (2008). Data envelopment analysis with uncertain data: An application for Iranian electricity distribution companies. *Energy policy*, *36*(11), 4247–4254. https://doi.org/10.1016/j.enpol.2008.08.004
[22] Omrani, H. (2013). Common weights data envelopment analysis with uncertain data: A robust optimization approach. *Computers & industrial engineering*, *66*(4), 1163–1170. https://doi.org/10.1016/j.cie.2013.07.023
[23] Arabmaldar, A., Josef, J., & and Hosseinzadeh Saljooghi, F. (2017). A new robust DEA model and super-efficiency measure. *Optimization*, *66*(5), 723–736. https://doi.org/10.1080/02331934.2017.1295047
[24] Toloo, M., Mensah, E. K., & Salahi, M. (2022). Robust optimization and its duality in data envelopment analysis. *Omega*, *108*, 102583. https://doi.org/10.1016/j.omega.2021.102583
[25] Salahi, M., Mehdi, T., & and Hesabirad, Z. (2019). Robust russell and enhanced russell measures in DEA. *Journal of the operational research society*, *70*(8), 1275–1283. https://doi.org/10.1080/01605682.2018.1489353
[26] Arabmaldar, A., Sahoo, B. K., & Ghiyasi, M. (2023). A generalized robust data envelopment analysis model based on directional distance function. *European journal of operational research*, *311*(2), 617–632. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2023.05.005
[27] Kao, C., & and Hung, H. T. (2005). Data envelopment analysis with common weights: The compromise solution approach. *Journal of the operational research society*, *56*(10), 1196–1203. https://doi.org/10.1057/palgrave.jors.2601924
[28] Jahanshahloo, G. R., Sadeghi, J., & Khodabakhshi, M. (2017). Proposing a method for fixed cost allocation using DEA based on the efficiency invariance and common set of weights principles. *Mathematical methods of operations research*, *85*(2), 223–240. https://doi.org/10.1007/s00186-016-0563-z
[29] Ghazi, A., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2019). Assessment and budget allocation of Iranian natural gas distribution company- A CSW DEA based model. *Socio-economic planning sciences*, *66*, 112–118. https://doi.org/10.1016/j.seps.2018.07.009
[30] Soltanifar, M., Ghiyasi, M., Emrouznejad, A., & Sharafi, H. (2024). A novel model for merger analysis and target setting: A CSW-Inverse DEA approach. *Expert systems with applications*, *249*, 123326. https://doi.org/10.1016/j.eswa.2024.123326
[31] Peykani, P., Seyed Esmaeili, F. S., Pishvaee, M. S., Rostamy-Malkhalifeh, M., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2024). Matrix-based network data envelopment analysis: A common set of weights approach. *Socio-economic planning sciences*, *95*, 102044. https://doi.org/10.1016/j.seps.2024.102044
[32] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, *2*(6), 429–444. https://doi.org/10.1016/0377-2217(78)90138-8
[33] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, *30*(9), 1078–1092. https://doi.org/10.1287/mnsc.30.9.1078
[34] Kao, C., & Liu, S. T. (2000). Fuzzy efficiency measures in data envelopment analysis. *Fuzzy sets and systems*, *113*(3), 427–437. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00137-7
[35] Lertworasirikul, S., Fang, S. C., A. Joines, J., & L.W. Nuttle, H. (2003). Fuzzy data envelopment analysis (DEA): A possibility approach. *Fuzzy sets and systems*, *139*(2), 379–394. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(02)00484-0
[36] Azadeh, A., Mohammad, S., Seyed Mohammad, K., & and Firoozi, M. (2014). An integrated fuzzy simulation–fuzzy data envelopment analysis approach for optimum maintenance planning. *International journal of computer integrated manufacturing*, *27*(2), 181–199. https://doi.org/10.1080/0951192X.2013.812804
[37] Emrouznejad, A., Anouze, A. L., & Thanassoulis, E. (2010). A semi-oriented radial measure for measuring the efficiency of decision making units with negative data, using DEA. *European journal of operational research*, *200*(1), 297–304. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2009.01.001